Объ одномъ обобщенiи теоремы Абеля

Д. Мордухай-Болтовскаго.

§ 1. Пусть

$$F(z, u) = 0$$

неприводимое уравненiе m-ой степени алгебраической кривой.

Пересѣчемъ эту кривую другой алгебраической кривой, въ ур ненiи которой степени n

$$\Phi(z, u, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$$

коэффицiенты рацiональныя функцiи нѣкотораго числа перемѣнны параметровъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Исключенiе u изъ уравненiй (1) и (2) даетъ уравненiе

$$\Omega(z, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

опредѣляющее значенiе z для точекъ пересѣченiя упомянутыхъ кр выхъ, въ которомъ коэффицiенты будутъ также рацiональными фун цiями отъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Значенiя z, u для точекъ пересѣченiя, число которыхъ рав mn, будемъ обозначать черезъ

$$(z_1, u_1), (z_2, u_2), \ldots, (z_{mn}, u_{mn}).$$

Если $R(z, u)$ рацiональная функцiя z, u, а слѣдовательно

$$J(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} R(z, u)\, dz$$

Абелевъ интегралъ, относящійся къ кривой (1), то по теоремѣ Абеля въ ея обобщенномъ видѣ *):

Сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz \tag{4}$$

равна суммѣ раціональной функціи параметровъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и линейной функціи съ постоянными коэффиціентами логариѳмовъ раціональныхъ функцій тѣхъ же параметровъ.

Предположимъ теперь, что въ области $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ уравненіе (3) импримитивно, т. е. предположимъ, что корни этого уравненія удовлетворяютъ неприводимому въ области $(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ уравненію

$$\Psi(z, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{5}$$

степени s, гдѣ ξ удовлетворяетъ неприводимому въ области $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ уравненію

$$\Theta(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{6}$$

степени $s = \frac{mn}{r}$.

Соотвѣтственно различнымъ корнямъ уравненія (6) корни уравненія (3) раздѣлятся на s системъ импримитивности по r корней въ каждой.

Обозначимъ черезъ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ корни уравненія (6). Тогда корни первой системы

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_r$$

будутъ удовлетворять уравненію

$$\Psi(z, \xi_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \tag{7}$$

второй системы

$$z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_{2r}$$

уравненію

$$\Psi(z, \xi_2, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

и т. д.

---

*) Abel. Oeuvres. t. I. Demonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

Appell et Goursat. Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. § 189, p. 416.

Возьмемъ сумму интеграловъ, подобную (4), которую разсматривалъ Абель:

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz,$$

но распространенную не на всѣ mn корней уравненія (3), а только на корни, принадлежащіе первой системѣ или на соотвѣтствующія имъ точки пересѣченія кривыхъ (1) и (2). Слѣдуя Абелю, находимъ полный дифференціалъ J относительно $a_1, a_2, \ldots, a_k$

$$\delta J = \sum_{i=1}^{i=r} R(z_i, u_i)\, \delta z_i, \tag{8}$$

гдѣ δ знакъ дифференцированія по $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Но уравненія (1), (5) и (6) намъ даютъ:

$$\delta F(z_i, u_i) = 0,$$

$$\delta \Psi(z_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

$$\delta \Theta(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

откуда, обозначая для краткости

$$F(z_i, u_i) = F_i,$$

$$\Psi(z_i, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Psi_i,$$

$$\Theta(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Theta_1,$$

имѣемъ

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial F_i}{\partial u_i} \delta u_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_j} \delta u_j = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Theta_1}{\partial a_j} \delta u_j = 0.$$

Изъ этой системы линейныхъ относительно δz_i, δu_i, $\delta \xi_1$ уравненій получаемъ

$$\delta z_i = \frac{\dfrac{\partial F_i}{\partial u_i} \sum\limits_{j=1}^{j=k} \dfrac{\partial(\Theta_1, \Psi_i)}{\partial(\xi_1, a_j)} \delta a_j}{\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial \xi_1} \cdot \dfrac{\partial(F_i, \Psi_i)}{\partial(z_i, u_i)}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=k} Q_j(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \delta a_j,$$

гдѣ $Q(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ раціональная функція $z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Подставляя это выраженіе вмѣсто δz_i въ выраженіе (8), получаемъ:

$$\delta J = \sum_{j=1}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=r} Q_j(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, R(z_i, u_i)\, \delta a_j,$$

$$\delta J = \sum_{j=1}^{j=k} P_j(z_1, z_2, \ldots, z_r, u_1, u_2, \ldots, u_r, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \delta a_j,$$

гдѣ P_j раціональная функція $z_1, z_2, \ldots, z_r, u_1, u_2, \ldots, u_r, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k$ и кромѣ того симметрическая функція паръ $(z_1, u_1), (z_2, u_2), \ldots, (z_r, u_r)$ Вслѣдствіе предполагаемой неприводимости уравненіе (5), а слѣдовательно и (3), кратныхъ корней не имѣютъ, а потому

$$u_i = \omega(z_i, a_1, a_2, \ldots, a_k), \tag{9}$$

гдѣ ω раціональная функція $z_i, a_1, a_2, \ldots, a_k$, общая для всѣхъ значеній значка i.

Подставляя это выраженіе u_i въ функцію P_j, мы приводимъ эту функцію къ симметрической функціи только отъ $z_1, z_2, \ldots, z_r$, раціональной относительно $z_1, z_2, \ldots, z_r, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k$, а пользуясь уравненіемъ (7), приводимъ ее къ раціональной функціи $\xi, a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\Pi_j(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Такимъ образомъ

$$\delta J = \sum_{j=1}^{j=k} \Pi_j(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \delta a_j.$$

Откуда, обозначая черезъ $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_k^{(0)}$ частныя значенія $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и черезъ $\xi_1^{(1)}$ значеніе ξ_1 при $a_1 = a_1^{(0)}$, черезъ $\xi_1^{(2)}$ значеніе ξ_1 при $a_1 = a_1^{(0)}$ и при $a_2 = a_2^{(0)}$ и т. д., черезъ $\xi_1^{(k-1)}$ значеніе ξ_1 при $a_1 = a_1^{(0)}$, $a_2 = a_2^{(0)}, \ldots, a_{k-1} = a_{k-1}^{(0)}$, получимъ:

$$J = \int_{a_1^{(0)}}^{a_1} \Pi_1(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, da_1 + \int_{a_2^{(0)}}^{a_2} \Pi_2(\xi_1^{(1)}, a_1^{(0)}, a_2, \ldots, a_k)\, da_2 +$$

$$+ \int_{a_3^{(0)}}^{a_3} \Pi_3(\xi_1^{(2)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3, \ldots, a_k)\, da_3 + \ldots + \tag{10}$$

$$+ \int_{a_k^{(0)}}^{a_k} \Pi_k(\xi_1^{(k-1)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_{k-1}^{(0)}, a_k)\, da_k + C,$$

гдѣ постоянная C функція (z_0, u_0).

Такимъ образомъ сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0 u_0)}^{(z_i u_i)} R(z, u)\, dz$$

не выражается вообще черезъ алгебраическія функціи и логариѳмы алгебраическихъ функцій параметровъ, но выражается черезъ сумму функцій отъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$, изъ которыхъ каждая опредѣляется Абелевымъ интеграломъ

$$\int \Pi(\xi, a)\, da,$$

зависящимъ отъ уравненія s-ой относительно ξ степени, т. е. равной числу системъ импримитивности уравненія (3), опредѣляющаго значенія z, одной изъ координатъ точекъ пересѣченія кривыхъ (1) и (2).

Если корни уравненія (3) дѣлятся на двѣ системы импримитивности, т. е. уравненіе (6) второй степени относительно ξ, то въ лѣвую часть уравненія (10) будутъ входить только ультраэллиптическіе интегралы.

Если же уравненіе (6) первой степени, то получаемъ случай Абелевой теоремы, такъ какъ тогда ξ выражается раціонально черезъ a.

§ 2. Оставляя въ сторонѣ этотъ слишкомъ общій случай, мы останавливаемся на частномъ, на нашъ взглядъ наиболѣе интересномъ.

Возьмемъ семейство кривыхъ, опредѣляемыхъ алгебраическими уравненіями:

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0, \tag{11}$$

степени n_1 относительно (z, u), и

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0, \tag{12}$$

степени n_2 относительно μ, при чемъ мы предполагаемъ, что во второмъ уравненіи $\Theta(\lambda, \mu)$ не разлагается на множители, кривая опредѣляемая этимъ уравненіемъ не разлагается на кривыя нисшихъ порядковъ.

Исключая μ изъ уравненій (11) и (12), получаемъ уравненіе $n_1 n_2$-ой степени:

$$\Phi(z, u, \lambda) = 0, \tag{13}$$

содержащее одинъ перемѣнный параметръ λ.

Исключая u изъ уравненій (1) и (13), получаемъ уравненіе $m n_1 n_2$-ой степени:

$$\Omega(z, \lambda) = 0. \tag{14}$$

Можно доказать, что это уравненіе въ томъ случаѣ, когда для точекъ пересѣченія кривыхъ (1) и (13) одновременно не обращаются въ нуль функціи $\varphi(z, u)$, $\psi(z, u)$, $\chi(z, u)$, уравненіе импримитивное, какъ уравненіе (3), разсмотрѣнное въ § 1.

Замѣтимъ прежде всего, что уравненіе (14) можно получить такимъ образомъ.

Составляемъ произведеніе функцій

$$[\varphi(z, u^{(1)}) + \lambda\psi(z, u^{(1)}) + \mu\chi(z, u^{(1)})],$$
$$[\varphi(z, u^{(2)}) + \lambda\psi(z, u^{(2)}) + \mu\chi(z, u^{(2)})],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[\varphi(z, u^{(m)}) + \lambda\psi(z, u^{(m)}) + \mu\chi(z, u^{(m)})],$$

гдѣ $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}$ различныя значенія u, опредѣляемыя уравненіемъ (1). Произведеніе это

$$\prod_{i=1}^{i=m}[\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda\psi(z, u^{(i)}) + \mu\chi(z, u^{(i)})],$$

будучи функціей симметрической относительно $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}$, будетъ равно раціональной функціи z, λ, μ, которую означимъ черезъ $\Psi(z, \lambda, \mu)$.

Такимъ образомъ для точекъ пересѣченія мы будемъ имѣть:

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = 0. \tag{15}$$

Намъ остается только исключить μ при помощи уравненія

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0. \tag{12}$$

Теперь докажемъ, что при сдѣланномъ предположеніи относительно функцій $\varphi(z,u)$, $\psi(z,u)$, $\chi(z,u)$ уравненіе (15) будетъ неприводимо въ области (λ, μ).

Предположимъ, что имѣетъ мѣсто противное, что для всѣхъ значеній γ, μ

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z, \lambda, \mu)\, \Psi_2(z, \lambda, \mu) \ldots \Psi_k(z, \lambda, \mu).$$

Замѣтимъ, что неприводимые множители $\Psi(z,\lambda,\mu)$ функціи цѣлыя относительно z, λ, μ, можно считать тоже цѣлыми функціями λ, μ, ибо въ противномъ случаѣ, приводя въ нихъ всѣ коэффиціенты при степеняхъ z къ одному знаменателю, имѣли бы:

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = \frac{\Psi_1(z, \lambda, \mu)\, \Psi_2(z, \lambda, \mu) \ldots \Psi_k(z, \lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)},$$

откуда $f(\lambda, \mu) =$ постоянному.

Разсматриваемая, какъ функція цѣлая λ, μ, $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$ должна или вовсе не содержать λ, μ, или дѣлиться на одинъ изъ множителей,

$$\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda\psi(z, u^{(i)}) + \mu\chi(z, u^{(i)})$$

функціи $\Psi(z,\lambda,\mu)$.

Исключая пока первый случай, когда

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z), \tag{16}$$

т. е. функція $\Psi(z,\lambda,\mu)$ содержитъ множитель независящій отъ λ, μ, мы должны представить $\Psi_1(z,\lambda,\mu)$ въ слѣдующей формѣ:

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}) \prod_{i=1}^{i=l} [\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda\psi(z, u^{(i)}) + \mu\chi(z, u^{(i)})].$$

Можно доказать, что $l = m$.

Положимъ $l < m$. Обозначая коэффиціентъ при $\lambda^\alpha \mu^\beta$ по разложеніи произведенія въ правой части черезъ $\eta_{\alpha\beta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})$, а черезъ $\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})$ коэффиціентъ при $\lambda^\gamma \mu^\delta$, замѣтимъ, что функціи

$$\eta_{\alpha\beta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})\, \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)});$$

$$\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})\, \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}),$$

какъ равныя коэффиціентамъ при $\lambda^\alpha \mu^\lambda$ и $\lambda^\gamma \mu^\delta$ въ $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$, должны приводиться къ функціи отъ z, и тоже относится къ ихъ частному:

$$\frac{\eta_{\alpha\lambda}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})}{\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})} = \eta(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)}).$$

Но при неприводимости уравненія (1) это можетъ быть лишь въ въ томъ случаѣ, когда въ η входятъ не только $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)}$, но и $u^{(l+1)}, \ldots, u^{(m)}$, т. е. когда $l = m$, противно предположенію.

Если же $l = m$, то $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$ дѣлится на $\Psi(z, \lambda, \mu)$; тогда имѣемъ

$$\omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}) = 1,$$

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi(z, \lambda, \mu),$$

и уравненіе (15) противно допущенію неприводимо.

Остается только разсмотрѣть случай, исключенный нами, когда

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z), \tag{16}$$

т. е. когда уравненіе (15) имѣетъ корни, независящіе отъ λ, μ. Но тогда существуютъ такія значенія z, u, которыя, удовлетворяя уравненію (1), удовлетворяютъ вмѣстѣ съ тѣмъ уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ λ, μ, или удовлетворяютъ одновременно тремъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \varphi(z, u) &= 0, \\ \psi(z, u) &= 0, \\ \chi(z, u) &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Можно еще сказать: точки пересѣченія кривыхъ (1) и (13) тогда совпадаютъ съ общими тремъ кривымъ (17) точками, если таковыя у нихъ существуютъ.

Такимъ образомъ, если соблюдено вышеизложенное условіе, то уравненіе

$$\Omega(z, \lambda) = 0 \tag{14}$$

импримитивно, и притомъ число системъ импримитивности равно степени уравненія (12) относительно μ, число же корней въ каждой системѣ равно степени $\Psi(z, \lambda, \mu)$ относительно z, т. $mn_1 = r$. Согласно съ вышедоказаннымъ въ § 1 сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz$$

выражается черезъ одинъ Абелевъ интегралъ

$$\int \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda\,,$$

если $\mu = \mu_1$ тотъ корень уравненія (12), которому соотвѣтствуютъ корни

$$z_1,\ z_2, \ldots, z_{n_1 m}\,,$$

которыя, слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненію

$$\Psi(z, \lambda, \mu_1) = 0.$$

Такимъ образомъ

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz = \int \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + C, \tag{18}$$

гдѣ C независитъ отъ z_i, u_i, а только отъ z_0, u_0. Обозначая лѣвую часть этого равенства черезъ $J[z_i, u_i]$ и полагая, что для $\lambda = \lambda'$

$$z_1 = z_1',\ z_2 = z_2', \ldots, z_r = z_r';\quad u_1 = u_1',\ u_2 = u_2', \ldots, u_r = u_r',$$

для $\lambda = \lambda''$

$$z_1 = z_1'',\ z_2 = z_2'', \ldots, z_r = z_r'';\quad u_1 = u_1'',\ u_2 = u_2'', \ldots, u_r = u_r'',$$

а слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_i', u_i')}^{(z_i'', u_i'')} R(z_1 u)\, dz = J[z_i'', u_i''] - J[z_i', u_i'],$$

выводимъ изъ равенства (18), что

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_i', u_i')}^{(i_i'', u_i'')} R(z, u)\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda. \tag{19}$$

Интегралъ $\int \Pi(\lambda, \mu)\, d\lambda$ относится къ кривой $\Theta(\lambda, \mu) = 0$, которую мы можемъ задавать произвольно съ однимъ условіемъ, чтобы эта кривая не разлагалась на кривыя нисшаго порядка. Въ случаѣ, если это уравненіе первой степени относительно μ и λ:

$$\alpha\lambda + \beta\mu = \gamma\,,$$

то уравненіе

$$\Phi(z, u, \lambda) = 0 \tag{13}$$

будетъ типа

$$\Phi_1(z, u) + \lambda \Phi_2(z, u) = 0$$

т. е. уравненіемъ пучка кривыхъ, и теорема даетъ извѣстный случай Абелевой теоремы *).

Сумма J будетъ выражаться черезъ алгебраическія функціи параметра λ и логариѳмы алгебраическихъ функцій, а слѣдовательно и черезъ алгебраическія и логариѳмы алгебраическихъ функцій (z_1, u_1), $(z_2, u_2), \ldots, (z_r, u_r)$ и въ томъ случаѣ, когда уравненіе (12) будетъ такое:

$$\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 + \delta\lambda + \varepsilon\mu + \zeta = 0.$$

Когда же уравненіе (12) будетъ четвертой степени относительно λ и второй относительно μ, напримѣръ

$$\mu^2 = (1 - \lambda^2)(1 - k^2\lambda^2), \tag{20}$$

то получаемъ выраженіе суммы Абелевыхъ интеграловъ черезъ одинъ эллиптическій интегралъ.

Мы могли бы возпроизвести все доказательство § 1, примѣняясь къ изслѣдуемому частному случаю, при которомъ должны были бы выразить δz_i въ функціи z_i, u_i, λ, μ и $\delta\lambda$ изъ уравненій:

$$\delta\Phi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_i}\delta u_i + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial\psi_i}{\partial u_i}\delta u_i\right)\lambda +$$

$$+ \left(\frac{\partial\chi_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial\chi_i}{\partial u_i}\delta u_i\right)\mu_1 + \psi_i\delta\lambda + \chi_i\delta\mu_1 = 0$$

$$\delta F_i = \frac{\partial F_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial F_i}{\partial u_i}\delta u_i = 0$$

$$\delta\Theta_1 = \frac{\partial\Theta_1}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\Theta_1}{\partial\mu_1}\delta\mu_1 = 0.$$

Откуда

$$\delta z_i = \frac{\left(\psi_i \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\mu_1} - \chi_i \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\lambda_1}\right)\dfrac{\partial F_i}{\partial u_i}}{\Delta_i \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\mu_1}}\delta\lambda,$$

---

*) Appell et Goursat. p. 418.

гдѣ

$$\varDelta(z_i,\ u_i) = \frac{\partial(F_i,\ \varphi_i)}{\partial(z_i,\ u_i)} + \frac{\partial(F_i,\ \psi_i)}{\partial(z_i,\ u_i)}\lambda + \frac{\partial(F_i,\ \chi_i)}{\partial(z_i,\ u_i)}\mu_1 .$$

Функція, обозначенная въ § 1 черезъ P_j, въ настоящемъ случаѣ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$P_j(z_i,\ u_i,\ \lambda,\ \mu_1) =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial\Theta(\lambda,\ \mu_1)}{\partial\mu_1}\sum_{i=1}^{i=r}\dfrac{R(z_i,\ u_i)\ \psi(z_i,\ u_i)}{\varDelta(z_i,\ u_i)} - \dfrac{\partial\Theta(\lambda,\ \mu_1)}{\partial\lambda}\sum_{i=1}^{i=r}\dfrac{R(z_i,\ u_i)\ \chi(z_i,\ u_i)}{\varDelta(z_i,\ u_i)}}{\dfrac{\partial\Theta(\lambda,\mu_1)}{\partial\mu_1} : \dfrac{\partial F(z_i,\ u_i)}{\partial u_i}} .$$

§ 3. Если Абелевъ интегралъ

$$J = \int_{(z_i',\, u_i')}^{(z_i'',\, u_i'')} R(z,\ u)\, dz$$

перваго рода, т. е. конеченъ при всякомъ положеніи точекъ (z_i'', u_i''), то интегралъ во второй части равенства (19) будетъ тоже перваго рода.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ обратное, что интегралъ

$$\int_{(\lambda',\, \mu')}^{(\lambda'',\, \mu'')} \Pi(\lambda,\ \mu_1)\, d\lambda$$

обращается въ безконечность при $\lambda'' = \lambda^{(0)}$, мы должны предположить, что при этомъ значеніи λ одинъ изъ интеграловъ лѣвой части уравненія (19) тоже обращается въ безконечность, что противно условію.

Если возьмемъ случай уравненія (20), получимъ, что

$$\sum_{i=1}^{i=r}\int_{(z_i',\, u_i')}^{(z_i'',\, u_i'')} R(z,\ u)\, dz = A\int_{(\lambda',\, \mu')}^{(\lambda'',\, \mu'')}\frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} \tag{21}$$

гдѣ A постоянное,

$$(z_1',\, u_1'),\ (z_2',\ u_2'),\ \ldots,(z_i',\ u_i')$$

удовлетворяютъ уравненію

$$\varphi(z,u) + \lambda'\psi(z,u) + \chi(z,u)\sqrt{(1-\lambda'^2)(1-k^2\lambda'^2)} = 0,$$

$$(z_1'',\ u_1''),(z_2'',\ u_2''),\ldots,(z_i'',\ u_i'')$$

уравненію

$$\varphi(z,u) + \lambda''\psi(z,u) + \chi(z,u)\sqrt{(1-\lambda''^2)(-k^2\lambda''^2)} = 0.$$

Возьмемъ для интеграла перваго рода обычную для него форму:

$$\int_{(z_i', u_i')}^{(z_i'', u_i'')} R(z, u)\, dz = \int_{(z_i', u_i')}^{(z_i'', u_i'')} \frac{Q(z, u)}{F_u'(z, u)}\, dz$$

$$\int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{N(\lambda, \mu_1)}{\Theta'_{\mu_1}(\lambda, \mu_1)}\, d\lambda$$

гдѣ $Q(z, u)$ цѣлая функція m—3-ей степени отъ z, u, $N(\lambda, \mu_1)$ цѣлая функція n_2 — 3-ой степени отъ λ, μ.

Равенство (19) для этого случая напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_i', u_i')}^{(z_i'', u_i'')} \frac{Q(z_1 u)}{F_u'(z, u)}\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{N(\lambda, \mu_1)}{\Theta'_{\mu_1}(\lambda, \mu_1)}\, d\lambda. \tag{22}$$

§ 4. Мы сдѣлаемъ еще одно очень важное замѣчаніе, касающееся условія неприводимости уравненія (5) въ § 1 и (14) въ § 2.

Въ нашихъ разсужденіяхъ мы вездѣ предполагали, что уравненіе

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{5}$$

а слѣдовательно и

$$\Omega(z, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{3}$$

неприводимы, т. е. Ω не разлагается на множители $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ раціональные относительно $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Но существуетъ одинъ случай, когда не смотря на приводимость Ψ и Ω теорема § 1 имѣетъ мѣсто. Это тотъ случай, когда Ψ разлагается на множитель $\Psi_1(z)$ независящій отъ ξ, a_1, $a_2, \ldots, a_k$ и другой неприводимый множитель $\Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k)$, такъ что

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Psi_1(z)\, \Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k). \tag{23}$$

Тогда къ уравненію

$$\Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{24}$$

мы можемъ приложить всѣ разсужденія, которыя прилагались къ

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \tag{5}$$

такъ какъ: во первыхъ корни уравненія (24) удовлетворяютъ импримитивному уравненію

$$\frac{\Omega(z, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\Psi_1(z)} = \Omega_1(z, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0; \tag{25}$$

во вторыхъ, такъ какъ это уравненіе неприводимо, ни одинъ изъ корней его не будетъ кратнымъ, и $u_1, u_2, \dots, u_q$, соотвѣтствующіе корнямъ $z_1, z_2, \dots, z_q$ уравненія (25), выразятся раціонально (9) въ послѣднихъ; а на этихъ пунктахъ и основывается все доказательство § 1.

Такимъ образомъ и къ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=q} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz$$

примѣнима теорема § 1.

Но такъ какъ корни уравненія

$$\Psi_1(z) = 0$$

не зависятъ отъ $a_1, a_2, \dots, a_k$, то прибавленіе къ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=q} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz = \int \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + C \tag{26}$$

суммы

$$\sum_{i=q+1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz$$

гдѣ $z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_r$ корни уравненія $\psi_1(z) = 0$, равносильно прибавленію къ правой части равенства (26) постояннаго, такъ что послѣднее имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда лѣвая часть уравненія (3) или (5) содержитъ множитель $\Psi_1(z)$.

Это же замѣчаніе относится и къ случаю кривой (13), т. е. $\Psi(z, \lambda, \mu)$ можетъ содержать множитель независящій отъ $\lambda, \mu, - \Psi_1(z)$.

Но тогда, какъ мы выше въ § 2 показали, существуютъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ (1) и (13), лежащія въ общихъ тремъ кривымъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z, u) &= 0 \\ \psi(z, u) &= 0 \\ \chi(z, u) &= 0 \end{aligned}\right| \tag{17}$$

точкахъ. Обратно, если существуютъ общія тремъ кривымъ (17) точки, и съ этими точками совпадаютъ нѣкоторыя точки пересѣченія кривыхъ (1) и (13), то $\Psi(z, \lambda, \mu)$ содержитъ множитель $\Psi_1(z)$, независящій отъ λ, μ. Въ самомъ дѣлѣ, тогда уравненія (1) и (13) имѣютъ общія рѣшенія независящія отъ λ, μ, и тоже относится къ $\Psi(z, \lambda, \mu) = 0$.

Замѣтимъ также, что въ лѣвой части равенства (19), представляющаго слѣдствіе (18), всѣ члены, относящіеся къ корнямъ уравненія $\Psi_1(z)$ равны нулю, и оно можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{i=q}\int_{(z_0,u_0)}^{(z''_i,u''_i)} R(z,u)\,dz = \int_{(\lambda',\mu')}^{(\lambda'',\mu'')} \Pi(\lambda,\mu_1)\,d\lambda + \sum_{i=1}^{i=q}\int_{z_0,u_0)}^{(z'_i,u'_i)} R(z,u)\,dz. \tag{27}$$

§ 5. Предположимъ, что уравненіе

$$\Theta(\lambda,\mu)=0 \tag{12}$$

таково, что при

$$\lambda=0 \qquad \mu_1=0 \tag{28}$$

такъ, что при $\lambda=0$

$$\varphi(z,u)+\lambda\psi(z,u)+\mu_1\chi(z,u)=\varphi(z,u),$$

и затѣмъ предположимъ, что функціи $\varphi(z,u)$, $\psi(z,u)$, $\chi(z,u)$ $n_1=m$—2-ой степени.

Мы можемъ, какъ извѣстно опредѣлить коэффиціенты функціи $\varphi(z,u)$ такъ, что она будетъ имѣть mn_1-p *) напередъ заданныхъ нулей [или точекъ пересѣченія кривыхъ $F(z,u)=0$ и $\varphi(z,u)=0$], если въ число ихъ включить всѣ двойныя точки кривой (1) числомъ δ. Остальныя p нулей опредѣлятся, какъ и коэффиціенты, въ видѣ алгебраическихъ функцій ихъ.

При $m\geqq 3$, что мы будемъ всегда, конечно, предполагать, всѣ нули раздѣлимъ на 4 группы:

I) Произвольно заданныя точки: (z''_1, u''_1), (z''_2, u''_2), $\ldots$, (z''_{p+1}, u''_{p+1}), число которыхъ $p+1$.

II) Другія $m-3$ произвольно заданныя точки.

III) δ двойныхъ точекъ $F(z,u)$, считаемыя за 2δ точекъ пересѣченія.

IV) p опредѣляемыхъ предыдущими нулей.

Коэффиціенты же $\psi(z,u)$ и $\chi(z,u)$ мы можемъ опредѣлить такъ, чтобы какъ $\psi(z,u)$, такъ и $\chi(z,u)$ имѣли нули общія съ $\varphi(z,u)$, именно принадлежащія IV, III и II группамъ, значитъ числомъ mn_1-p-1; мы можемъ слѣдовательно произвольно задать еще одинъ нуль и въ $\psi(z,u)$ и $\chi(z,u)$; такимъ образомъ остается еще по перемѣнному параметру; имъ дадимъ опредѣленныя частныя значенія. Два параметра λ, μ въ функціи

---

*) гдѣ p родъ кривой (Geschlecht, Rang).

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u), \tag{29}$$

въ силу уравненія § 2, сводятся къ одному параметру λ; эта функція тоже имѣетъ $mn_1 - p - 1$, общихъ съ $\varphi(z, u)$ нулей, именно, II, III и IV группъ.

Параметромъ λ распорядимся такъ, чтобы функція (29) имѣла бы еще одинъ произвольно нами задаваемый нуль (z_0, u_0).

Пусть это значеніе λ есть $\lambda = \lambda'$.

Всѣ точки пересѣченія послѣднихъ трехъ группъ, какъ общія уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ λ, μ и, слѣдовательно, опредѣляемыя уравненіемъ

$$\Psi_1(z) = 0,$$

не входятъ ни въ лѣвую, ни въ правую часть равенства (27), и кромѣ того одинъ изъ интеграловъ правой части, соотвѣтствующій точкѣ пересѣченія:

$$z_i' = z_0, \qquad u_i' = u_0,$$

равенъ нулю.

Итакъ мы имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i'', u_i'')} R(z, u)\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(0, 0)} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i', u_i')} R(z, u)\, dz.$$

Возьмемъ теперь общій случай кривой

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0,$$

когда для

$$\lambda = \lambda''$$

$$\mu_1 = \mu''.$$

Такую кривую мы можемъ всегда преобразовать къ разсмотрѣнному типу, положивъ:

$$L = \lambda - \lambda'',$$

$$M = \mu_1 - \mu''.$$

Пусть уравненіе (12) преобразуется тогда въ слѣдующее

$$T(L, M) = 0;$$

$$\Pi(\lambda, \mu) = \Pi(L, M),$$

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu_1\chi(z, u) = \Phi(z, u) + L\psi(z, u) + M\chi(z, u),$$

гдѣ

$$\varphi(z, u) + \lambda''\psi(z, u) + \mu''\chi(z, u) = \Phi(z, u)\,.$$

Тогда мы можемъ написать, что

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i'', u_i'')} R(z, u)\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i', u_i')} R(z, u)\, dz. \quad (30)$$

Отсюда получаемъ, что сумма $p+1$ значеній Абелева интеграла $J(z_i, u_i)$ сводится при помощи Абелева интеграла, относящагося къ произвольно-заданной кривой

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0\,,$$

къ числу p значеній того же интеграла.

Причемъ какъ предѣлы упомянутаго Абелева интеграла, такъ и значенія (z_i, u_i) для p интеграловъ, къ которымъ сводится $p+1$ заданныхъ, алгебраическія функціи отъ значеній z_i, u_i для этихъ послѣднихъ.

Теорема о сведеніи $p+1$ интеграловъ къ p интеграламъ при помощи алгебраическихъ функцій и логариѳмовъ является частнымъ случаемъ этой теоремы.

Для случая уравненія (20) и случая интеграловъ перваго рода имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i'', u_i'')} R(z, u)\, dz = A \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i', u_i')} R(z, u)\, dz. \quad (31)$$